

Energien (hohe Temperaturen) das *Rubens-Kurlbaumsche* Gesetz, das sich durch Gleichung (31) ausdrücken läßt. *Planck*<sup>11)</sup> setzte deshalb für den allgemeinen Fall unter Zusammenfassung der beiden Ausdrücke

$$\frac{d^2S}{dU^2} = -\frac{1}{b \cdot U} - \frac{a}{U^2}, \quad (32)$$

wobei nach (28) und (30) für niedrige Temperaturen das erste, für hohe Temperaturen das zweite Glied ausschlaggebend wird. Daraus folgt durch Integration

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{b} \cdot \ln \left( 1 + \frac{ab}{U} \right),$$

was unter Benutzung von (29) zu dem — zunächst halbempirischen — Gesetz

$$U_\nu d\nu = \frac{ab}{e^{\frac{b\nu}{T}} - 1} d\nu \quad (33)$$

führt, worin lediglich die Konstante  $b$  noch von der Frequenz des Resonators abhängt. Mit Hilfe von (25) ergibt sich daraus für die Energiedichte der schwarzen Strahlung die Formel

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{ab}{e^{\frac{b\nu}{T}} - 1} d\nu, \quad (34)$$

die, durch alle späteren Messungen bestätigt, für immer den Namen „*Plancksches Strahlungsgesetz*“ führen wird.

Allerdings stellte diese Gleichung zunächst nur ein halbempirisches Ergebnis dar, und es ergab sich die weitere Aufgabe, ihr einen physikalischen Sinn zu unterlegen, d. h. sie theoretisch vollständig zu deuten. *Planck* löste diese Aufgabe in — wie er selbst sagt<sup>12)</sup> — der angespanntesten Arbeit seines Lebens, indem er

<sup>11)</sup> Verhandl. dtsh. physik. Ges. 2, 202 [1900].

<sup>12)</sup> „Die Entstehung und bisherige Entwicklung der Quantentheorie“, Nobel-Vortrag vom 2. Juni 1920. Verlag S. Hirzel, Leipzig.

wieder auf die molekularstatistische Deutung der Entropie zurückgriff<sup>13)</sup>. Er berechnete mit Hilfe der Statistik, wie sich eine bestimmte Energie auf die Schwingungen einer großen Zahl von Resonatoren verschiedener Eigenfrequenz verteilt, wenn er annahm — und dies war das grundsätzlich Neue dieser Betrachtung — daß die Energie des einzelnen Resonators sich nicht stetig, sondern nur sprungweise zu ändern vermag. Es gibt dann nur eine begrenzte, endliche Zahl solcher „Mikrozustände“, und derjenige Makrozustand ist der wahrscheinlichste und entspricht dem Zustand maximaler Entropie, bei dem nach Gleichung (4) die Zahl der möglichen Mikrozustände ein Maximum erreicht. Aus dem *Wienschen Verschiebungsgesetz* (23) ließ sich ferner schließen, daß diese „Energiequanten“ der Resonatoren ihrer Schwingungszahl proportional sein mußten; der universelle Proportionalitätsfaktor ist das *Plancksche Wirkungsquantum*  $h$ , das mit der in Gleichung (33) auftretenden Konstanten  $b$  durch die Beziehung zusammenhängt

$$b = \frac{h\nu}{k},$$

worin die sog. *Boltzmannsche* Konstante  $k = R/N_L = a$  die zweite universelle Konstante der Strahlungsformel darstellt. Damit geht diese über in die bekannte Form

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \cdot \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \quad (35)$$

Von dieser Arbeit, vorgetragen am 14. Dezember 1900 in der Sitzung der Deutschen physikalischen Gesellschaft, nahm die Quantentheorie ihren Ausgang. Ihre Entdeckung ist letzten Endes der konsequenten Anwendung des Entropieprinzips zu verdanken, wobei allerdings das tiefe Verständnis des Entropiebegriffes dazugehörte, wie es *Max Planck* besessen hat.

Eingeg. am 1. April 1948. [A 127]

<sup>13)</sup> Verhandl. dtsh. physik. Ges. 2, 237 [1900].

## Der Weg zur Quanten- und Wellenmechanik

Von Prof. Dr. P. JORDAN, Hamburg

Die Geschichte der Quantentheorie selbst umfaßt nur etwa ein Vierteljahrhundert. Von der Entdeckung im Jahre 1900 hat sie bis 1927 gedauert: Damals wurde, auf der Grundlage der „statistischen Transformationstheorie“, durch die Aufstellung der Ungenauigkeitsregeln und die Ausbildung des Komplementaritätsbegriffes der physikalische Gedankeninhalt der inzwischen mathematisch voll erschlossenen Theorie abschließend klar gestellt. Eine Weiterentwicklung der Quantentheorie als solcher hat es seitdem nicht mehr gegeben — abgesehen davon, daß noch mancherlei Anwendungen der Theorie ausgearbeitet worden sind, darunter auch große und grundsätzlich bedeutsame, wie die Theorie des Ferromagnetismus, oder jetzt neuestens die Theorie der Supraleitung.

Aber diejenigen physikalischen Forschungen, die nicht darauf ausgehen, das Zusammenspiel schon bekannter Naturgesetze in verwickelteren, zunächst undurchsichtigen Beispielen aufzuklären, sondern vielmehr nach neuen, noch ganz unbekannten Naturgesetzen suchen — diese Forschungen haben seit 1927 nur noch außerhalb der eigentlichen Quantentheorie Arbeitsfelder gefunden, weil diejenigen Naturgesetze, die durch das *Plancksche*  $h$  symbolisiert werden, seit 1927 erschöpfend bekannt und durchschaut sind. Die Kernphysik und die Untersuchung der Höhenstrahlung, in der sich seitdem dies Spüren nach unentdeckten Gesetzlichkeiten mit schon so großen neuen Erfolgen vollzogen hat, gab wichtige Gelegenheiten erneuter Anwendung der schon bekannten quantentheoretischen Gesetze, und offenbarte wiederum deren beherrschende Bedeutung und unerschöpfliche Fruchtbarkeit; das Unbekannte jedoch, das uns hier in mannigfachen Formen entgegentritt, ist als solches nicht mehr durch das Wirkungsquantum bedingt. Wir haben mancherlei Anhaltspunkte für die Vermutung, daß hier ganz tiefe, ganz wunderbare Naturgesetze auf ihre Enthüllung warten, und daß der Knotenpunkt dieser Gesetze in einer neuen Natur-

konstanten, der Elementarlänge  $2 \cdot 10^{-13}$  cm liegt. Aber zunächst wissen wir von diesen neuen Gesetzlichkeiten nichts weiter, als daß wir eine (wachsende) Reihe von unverstandenen Einzeltatsachen kennen, deren Sinn und Bedeutung uns noch vollkommen verschlossen ist. Die Lage ist hier also ganz ähnlich derjenigen, die früher im Felde der Quantenforschung bestand, wo ebenfalls nach und nach mancherlei Teilstücke der so sonderbaren und so ungewohnten Quanten-Gesetzlichkeit sichtbar wurden, während ihr Zusammenhang bis 1924 größtenteils dunkel blieb, und nur ahnungsweise durch das Korrespondenzprinzip bezeichnet wurde.

Die eigentliche Geschichte der Quantentheorie bis zur abschließenden Aufklärung des Quantenrätsels ist also, zeitlich gemessen, nur recht kurz. Sie ist jedoch so reich an dramatischen Entwicklungen, überraschenden Wendungen, ungeahnten Begegnungen der Gedankengänge, daß die Erinnerung daran noch heute jedem der damals Miterlebenden die ungeheure Spannung wieder lebendig werden läßt, mit der uns das Bewußtsein erfüllte, große und weitreichende geistige Geschehnisse beobachten zu können.

Zum Merkwürdigsten gehört das Auseinandergehen und Wiederausammenfinden zweier verschiedener Entwicklungswege in der Quantentheorie, die lange Jahre wenig Einfluß aufeinander ausgeübt haben — ihre heiderseitigen Vertreter waren geneigt, die Gedankengänge der anderen Richtung mit Achtung, aber auch mit viel Skepsis zu betrachten. Der eine dieser Wege beginnt 1905 mit *Einsteins* Arbeit über die Lichtquanten. Es hat fast zwanzig Jahre gedauert, bevor diese tiefgründigen Gedanken auf Grund des *Compton*-Effektes (und der diesbezüglichen Koinzidenz-Experimente) endgültig allgemeine Anerkennung fanden. *De Broglie* kam von da aus zur Idee der Materiewellen: Wenn beim Licht mit den Wellen Korpuskeln verknüpft sind (in einer noch sehr geheimnisvollen Weise), dann könnten

umgekehrt mit den Korpuskeln eines Kathodenstrahls oder Atomstrahls Wellen verknüpft sein. Die mathematische Fassung dieses Gedankens ergab sich eindeutig, wenn man einmal die Kühnheit hatte, den Gedanken selber zu fassen. Und *Schrödinger* schuf, *de Broglies* Wege weiter verfolgend, die „Wellenmechanik“, mit welcher der Zugang zu den vollständigen Quantengesetzen in voller Breite eröffnet war.

Aber kurz vorher war man auch auf dem anderen Wege zum Ziele gekommen: Dieser Weg begann 1913 mit *Bohrs* Theorie des H-Atoms. Ganz im Gegensatz zur Lichtquanten-Lehre, mit welcher ihr Urheber so lange Jahre in geistiger Einsamkeit blieb (vielleicht wäre das in noch viel höherem Grade der Fall gewesen, wenn nicht die Relativitätstheorie diesem Urheber eine so ungeheure Autorität unter den Physikern gewonnen hätte) – ganz im Gegensatz hierzu wurde der von *Bohr* eingeschlagene Weg ein gemeinsamer Weg vieler Physiker, die sich an die Entwirrung und Deutung der Spektren machten, oder in der Richtung der *Franck-Hertz*schen Elektronenstoß-Experimente die Anregungsbedingungen der Spektren im Zusammenhang mit den Energien ihrer stationären Zustände untersuchten, oder die Spektroskopie des Röntgengebietes schufen. Hier gab es eine solche Fülle von Einzelproblemen, daß ganze Scharen tatkräftiger wissenschaftlicher Arbeiter darin lohnende, fruchtbare Aufgaben fanden. Neben den Bahnbrechern dieser Entwicklung, zu denen vor allem *Sommerfeld* gehört, haben viele andere Physiker, bekannte und unbekannte, ihren Beitrag in dieser Arbeit geleistet – einer Arbeit, die zu einer ungeheuren Ansammlung wertvoller empirischer Feststellungen führte, und die in der theoretischen Bearbeitung und Durchdenkung dieses Materials einen so aufregenden Wechsel ergab zwischen beglückenden, ermutigenden Erfolgen und harten Enttäuschungen, in denen sich immer wieder einmal erwies, wie unendlich fern man doch noch einer wirklichen Erfassung des Quantenrätsels war.

Aber diese Enttäuschungen, wie häufig sie auch waren, konnten das Vordringen nicht aufhalten: Immer mehr Teilstücke der großen, noch unverständenen Gesetzmäßigkeit gewannen unmißverständliche Deutlichkeit. Wenn es auch noch keineswegs gelingen wollte, diese Teilstücke mosaikartig zu einem Gesamtgemälde zusammenzusetzen, so ergaben sie doch in wachsendem Ausmaß Unterlagen für das Bemühen grübelnder Theoretiker, welche die großen Zusammenhänge des nur stellenweise erkennbar gewordenen Gemäldes zu erraten suchten.

Die Gedanken *Bohrs* und *Sommerfelds* hatten stark Gebrauch gemacht von den wegweisenden Überlegungen, welche *Planck* in seiner Untersuchung über die Quantelung des harmonischen Oszillators ausgeführt hatte: Die „Phasenintegrale“, die hernach in der Quantelung der Atommodelle eine so entscheidende Rolle spielen sollten, nahmen von dort ihren Ursprung. Und diese ganze Wegrichtung, die von *Bohr* und *Sommerfeld* eingeschlagen wurde – unter den vielen anderen Physikern, deren Beiträge aus dieser Entwicklung nicht fortzudenken sind, muß insbesondere *Landé* hervorgehoben werden – hat auch die Zustimmung *Plancks* leichter und eher erringen können, als die *Einsteinsche* Lichtquantenhypothese, in welcher *Plancks* vorsichtig-behutsames Urteil lange Zeit eine doch wohl allzu gewagte Hypothese sah.

Aber auch *Bohr* ist – hier ähnlich, wie *Einstein* – lange Zeit recht einsam und unverstanden geblieben mit gerade demjenigen Gedanken, welcher gewissermaßen seine persönlichste, eigenste Betrachtung der Quantenprobleme ausdrückte: Dem Korrespondenzprinzip. Der „Korrespondenz“-Gedanke spielte schon in den allerersten Gedanken *Bohrs* zur Theorie des Wasserstoffatoms eine Rolle, in einer eigentümlichen Überlegung, welche zur theoretischen Berechnung der *Rydberg*-Konstanten benutzt wurde. Diese korrespondenzmäßige Betrachtung ist aber damals wenig bekannt geworden, und die vielen an *Bohr* anknüpfenden oder seine Theorie des H-Atoms referierenden Verfasser haben diesen Gedanken, soweit ich sehe, niemals erwähnt. Erst später hat *Bohr* den Korrespondenzgedanken in allgemeiner Form hervorgehoben, und er ist dann nicht müde geworden, ihn immer wieder zu betonen, obwohl nur Wenige unter den Mitstreibern damals diesen Gedanken ebenso sehr zu würdigen bereit waren: *Sommerfeld*, der einmal das *Bohrsche*

Korrespondenzprinzip einen „Zauberstab“ nannte, mit welchem sein Urheber viele bedeutende Ergebnisse gewonnen hatte, brachte mit dieser Benennung deutlich ein aus ehrlicher Bewunderung und mißtrauischer Skepsis gemischtes Gefühl zum Ausdruck. Volles Vertrauen zu diesem sonderbaren Prinzip gewannen zunächst nur einige unmittelbare Schüler und Mitarbeiter *Bohrs*, die sich frühzeitig der Anwendung des Prinzips widmeten und seine Fruchtbarkeit in wichtigen Beispielen erwiesen; vor allem *Kramers* ist hier zu nennen. Erst kurz vor der Aufstellung der Quantenmechanik gelangte der *Bohrsche* Korrespondenzgedanke durch *Heisenberg*, *Pauli* und andere Physiker, die seinen tiefen Sinn im persönlichen Verkehr mit *Bohr* voll erfaßt hatten, zu allgemeiner Anerkennung unter den Quantentheoretikern. Das volle Verständnis des Korrespondenzprinzips bedeutete aber schon beinahe auch die volle Erfassung der quantenmechanischen Gesetzmäßigkeit.

Die große Schwierigkeit, welche das Korrespondenzprinzip lange Zeit dem Verständnis bot, lag darin, daß es keineswegs ein klar formulierbares und greifbares Prinzip – wie etwa das Energie-Prinzip, oder das Relativitätsprinzip – war, sondern eigentlich vielmehr das Programm einer künftigen Theorie: Es drückte eine ungefähre Ahnung aus von der Wegrichtung, in welcher nach *Bohrs* Überzeugung die künftige, endgültige Fassung der Quantentheorie gesucht werden mußte; und es liegt in der Natur der Sache, daß eine solche Ahnung nicht in glasklarer und scharfer Formulierung, sondern nur verhüllt und verschwommen ausgedrückt werden konnte. Der reiche sachliche Inhalt des Prinzips konnte nicht in einer abstrakten Formulierung festgenagelt, sondern nur in der verständnisvollen Erprobung an konkreten Anwendungsbeispielen schrittweise immer mehr verdeutlicht werden. Logische Denkschärfe allein genügte nicht zur Erfassung eines Gedankens, der sich gewissermaßen in *statu nascendi* – in einem lang ausgedehnten *statu nascendi* befand; williges Einfühlungsvermögen gehörte ebenso sehr zu dieser Erfassung hinzu.

Wenn wir trotzdem versuchen wollen, die allgemeine Tendenz des „korrespondenzmäßigen Denkens“ in ein paar Worten zu bezeichnen, so könnten wir etwa Folgendes sagen – und es lohnt sich, nebenbei bemerkt, es ein wenig ausführlich zu sagen, weil wir hier keineswegs von Dingen sprechen, die nur noch historische Bedeutung haben. Auch heute wird sich niemand rühmen können, wirklich in das Verständnis der modernen Quantentheorie eingedrungen zu sein, der nicht den Sinn des Korrespondenzgedankens begriffen hat. Wenn der Korrespondenzgedanke früher die Anleitung zum Aufspüren der Quantengesetze gab, so gibt er heute die unentbehrliche Anleitung zum sachlich-begrifflichen Verstehen der Quanten- und Wellenmechanik. (Obwohl es gewiß auch mancherlei Anwendungsbeispiele der modernen Quantentheorie gibt, an denen man allerlei Nützliches rechnen kann, ohne den Sinn der Sache eigentlich verstanden zu haben).

Wir finden, so etwa sagte *Bohr*, in der Mikrophysik Gesetzmäßigkeiten, die uns zunächst und vor allem in Erstaunen versetzen durch ihre Fremdartigkeit – die ganz verschieden sind von allem, was wir kennen und gewohnt sind, ganz verschieden von der Makrophysik. Daß ein Atom – also eine elektrische Mikroantenne – die Lichtenergie nicht in stetigem Fließen verausgibt, sondern in Quantensprüngen, die jeweils ein unteilbares *h* in Erscheinung treten lassen, das könnte als ein so unversöhnlicher Gegensatz zur stetigen Makrophysik erscheinen, daß man daran verzweifeln möchte, noch irgend welche Anwendungen gewohnter, bekannter Gesetze auf dies Mikrogesehen zu wagen. Trotzdem kann eine künftige Theorie, die uns ein umfassendes Verständnis dieser Erscheinungen geben soll, nur von einer starken Wahrung der Kontinuität unserer Gedankenentwicklung erhofft werden. Aber es ist irrig, wenn man glaubt, diese Kontinuität erreichen zu können durch irgendwelche krampfhaften Versuche (wie sie oft vorgetragen, aber heute, 1948, längst wieder vergessen sind), die Quantengesetzmäßigkeiten zu „erklären“ auf quasiklassischer Grundlage, oder sie zurück zu führen auf quasiklassische Gesetze. Sondern die Fruchtbarmachung der klassisch-makrophysikalischen Gesetze und Begriffe muß so vollzogen werden, daß wir uns die formalen Ähnlichkeiten vor Augen halten, welche trotz der eingreifenden Verschieden-

heiten doch vorhanden sind zwischen Quantenphysik und klassischer Physik. Solche Ähnlichkeiten bemerken wir, wenn wir unsere Aufmerksamkeit dafür schärfen, auf Schritt und Tritt; und indem wir vertrauen darauf, daß solche Ähnlichkeiten auch dort vorhanden sein dürften, wo wir sie bislang noch nicht bestätigt haben, gewinnen wir ein heuristisches Prinzip von großer Fruchtbarkeit – eben den „Zauberstab“, von dem *Sommerfeld* sprach.

Als ein Beispiel dieser korrespondenzmäßigen Ähnlichkeiten wollen wir den normalen *Zeeman*-Effekt herausgreifen. Die klassische Theorie sagt da ja Folgendes: Ein elastisch isotrop gebundenes, schwingendes Elektron wird, wenn es einem Magnetfeld ausgesetzt ist, eine kompliziertere Bewegung ausführen, welche als Überlagerung von drei verschiedenen periodischen Bewegungen mit etwas verschiedenen Frequenzen zu beschreiben ist: Die eine dieser drei Bewegungen ist eine Schwingung parallel zur Feldrichtung, mit unveränderter Frequenz, und die beiden anderen sind zwei Kreisbewegungen in der Ebene senkrecht zur Feldrichtung. Danach kann man ohne weiteres quantitativ übersehen, wie die Spektrallinie, welche von diesem Elektron emittiert wird, sich in drei Komponenten aufspaltet, wobei diese Komponenten ganz bestimmte Richtungsverteilungen von Intensität und Polarisation zeigen – entsprechend einer linear polarisierten und zwei zirkular polarisierten elektromagnetischen Kugelwellen. Der Vergleich mit dem Experiment zeigt nun, daß alle so erhaltenen theoretischen Aussagen vollkommen der Wirklichkeit entsprechen. Es gibt ja zwar – verwirrenderweise – auch den „anormalen“ *Zeeman*-Effekt; aber es hat sich schließlich ergeben (allerdings erst sehr spät), daß seine Besonderheiten keineswegs mit den Grundgesetzen des Wirkungsquantums in einer sehr innigen Beziehung stehen, sondern nur durch die sozusagen zusätzlichen Besonderheiten des Spinelektrons bedingt sind.

Die Quantentheorie ergibt nun ein gerade in den tiefsten Voraussetzungen völlig anderes Bild. Sie spricht von stationären Zuständen des fraglichen Atoms, von Richtungsquantelung, von der Frequenzbedingung,  $h\nu = E_1 - E_2$ , von ausgeschossenen Lichtquanten (wenn wir *Einstein* recht geben), und anderen neuartigen Begriffen; wieso kann nun trotzdem in den beobachtbaren Verhältnissen an den Spektrallinien genau das heraus kommen, was die klassische Theorie von ganz anderen Vorstellungen her behauptet hatte? Die genauere Betrachtung lehrt, daß man, um diese – vom Experiment erforderte – Übereinstimmung zuwege zu bringen, die „Auswahlregel“ der „magnetischen Quantenzahl“ einführen muß – d. h. eine Gesetzmäßigkeit, die sich dem Rahmen der damaligen quantentheoretischen Begriffe glatt einfügte, aber eine zusätzliche speziellere Gesetzmäßigkeit bedeutete.

Hier waren nun zwei verschiedene Beurteilungen der Sachlage möglich. Man konnte fragen: Wo finde ich eine Begründung dafür, daß diese Auswahlregel gilt, welche dann bewirkt, daß die Quantentheorie in diesem Sinne zu gleichen Ergebnissen führt, wie die klassische. Man konnte aber auch sagen – und dies war die Stellungnahme *Bohrs*, in der eine so tiefe Weisheit lag: Es genügt mir, zu sehen, daß die Auswahlregel erforderlich und ausreichend ist, um die notwendige Ähnlichkeit der Quantentheorie mit der klassischen herzustellen.

In der Tat, das bedeutete eine ganz neue – und wunderbar fruchtbare – Perspektive der Quantenerscheinungen: Es war wirklich der Zauberstab, und dieser Zauberstab sollte (wie die späteren Jahre erwiesen haben) nicht nur noch viele andere Beispiele von Auswahlregeln, Intensitätsgesetzen und sonstigen speziellen quantentheoretischen Gesetzmäßigkeiten erschließen, sondern auch den Zugang zum Gesamtverständnis dieser verschiedenen Spezialgesetzmäßigkeiten. Wir wollen gar nicht, so könnte man die hier verfolgte Tendenz ausdrücken, nach „Erklärungen“ suchen, sondern nach einer rein beschreibenden Gesamterfassung der Quantengesetze; und jedes Teilstück, das wir dabei finden, scheint uns gerade dann besonders vertrauenswürdig, wenn es dem werdenden Gesamtbild eine weitere Vollständigkeit seiner Ähnlichkeit mit der klassischen Physik gibt.

So ist schon in *Bohrs* Korrespondenzprinzip jene stark positivistische Wendung vorbereitet, welche später den *Helsen-*

*berg*schen Ideen ihr charakteristisches Gepräge gab – und diese so deutlich in die Geistesverwandtschaft zur ebenfalls stark positivistischen Relativitätstheorie stellte. Denn indem *Bohrs* Betrachtungsweise zugleich die tiefgreifende Verschiedenheit und auch die in erstaunlichem Maße durchgehend gewährte Ähnlichkeit von klassischer und Quantentheorie betonte, überwand sie mehr und mehr die bei den meisten anderen Physikern damals noch herrschenden Hoffnungen, die Quantenerscheinungen irgendwie „erklären“ zu können unter Zugrundelegung anderer, als eben der quantentheoretischen Gesichtspunkte selbst.

Nehmen wir als weiteres Beispiel die eindimensionale Bewegung eines beliebigen Oszillators, der also nicht harmonisch zu sein braucht. Wir drücken den Energieinhalt dieses Oszillators am besten als Funktion des „Phasenintegrals“  $J$  aus. Wenn wir in der „Phasenebene“ mit den beiden Koordinaten  $p, q$  die „Bewegung“ des fraglichen Massenpunktes verfolgen, so ergibt sich offenbar eine geschlossene Kurve – ein gewisses Oval – und  $J$  ist gerade der Flächeninhalt dieses Ovals. Man kann ja nun in einer gewissen Approximation den quantentheoretischen Oszillator theoretisch so behandeln, daß man ihn zunächst einfach klassisch durchrechnet; man muß dann, wenn man die Energie als Funktion  $E(J)$  des Phasenintegrals ausgerechnet hat, für  $J$  die diskreten Werte  $nh$  (mit  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) einsetzen: Dies ist ja die (von *Planck* angeregte) Methode, nach der *Bohr*, *Sommerfeld* und andere Theoretiker in der „heroischen Periode“ der Spektroskopie die Modelle von Atomen und Molekülen erfolgreich berechnet haben. Die niedrigste Absorptionsfrequenz des Oszillators in seinem  $n$ -ten Zustand sieht also so aus:

$$\nu = \frac{1}{h} (E[nh] - E[nh + h]);$$

und das steht in korrespondenzmäßiger Analogie zu der von der klassischen Mechanik bewiesenen Tatsache, daß die Frequenz des klassischen Oszillators gerade gleich

$$\nu = \frac{dE}{dJ}$$

ist. Im klassischen Gesetz tritt hier ein Differentialquotient auf, im korrespondierenden Quantengesetz ein Differenzenquotient; ein Unterschied, der der Stetigkeit der Makrophysik und der Unstetigkeit der Mikrophysik sinnfällig entspricht. Ebenso kann man diejenigen Absorptions- oder Emissionsfrequenzen, welche zu Übergängen gehören, bei denen sich die „Quantenzahl“  $n$  um mehr als 1 ändert, in Analogie setzen zu den klassisch berechneten Oberschwingungen des Oszillators.

Und damit kam *Bohr* auf denjenigen Gedanken, welcher die folgenreichste und wichtigste Anwendung und Konkretisierung des Korrespondenzgedankens bedeutete. Er verglich die Intensitäten der klassisch und der quantentheoretisch berechneten Spektrallinien, und sagte: Die uns noch unbekannten Gesetze der exakten Quantentheorie werden gewiß den klassischen auch darin ähnlich sein, daß sie ganz allgemein ähnliche Intensitäten ergeben, wie wir sie auch bei klassischer Ausrechnung erhalten hätten. Im einfachsten Beispiele des harmonischen Oszillators; bei dem es – klassisch gesprochen – eben gar keine Oberschwingungen gibt, führt das auf die quantentheoretische Auswahlregel, daß hier die Quantenzahl  $n$  sich bei Emission und Absorption von Licht immer nur um 1 verändern kann.

Nachträglich erscheint das alles natürlich, und der Weg sieht, rückwärts betrachtet, geradlinig und selbstverständlich aus. In Wahrheit war es ein sehr schwerer und dorniger Weg; und das, was wir hier nur an einfachsten, fast trivialen Beispielen erläutern, mußte an vielen verschiedenen, und auch an wesentlich komplizierteren und tiefer eindringenden Problemen erprobt und erfahren werden, bevor sich die Gedanken mit voller Zuversicht auf den ganz schmalen Pfad richteten, der allein zum Erfolge führen konnte – der zwar der Rückschau so deutlich vorgezeichnet scheint, der aber damals nur ein sehr verborgener Weg unter zahllosen anderen, teils sehr verlockenden, aber doch in die Irre führenden Wegen war. Ich sagte oben, man könne in einer gewissen Approximation die Eigenschaften des quantentheoretischen Oszillators ausrechnen aus dem korre-

spondierenden klassischen Modell; aber auch das ist bereits im Sinne der späteren Einsichten gesprochen: Damals sah man die Dinge anders, damals glaubte man, die klassischen Ersatzmodelle, wie die berühmten *Bohrschen* Elektronenbahnen, noch ganz ernst nehmen zu müssen. Viele Theoretiker haben z. B. geglaubt, daß die kritischen Frequenzen der Dispersion durchaus verschiedenen selen von den Emissions- und Absorptionsfrequenzen, nämlich gleich den klassischen Frequenzen der klassischen Modelle, die man als Unterlage der Berechnungen gebrauchte und damals als Realitäten ansah. Gerade nach den reichen Erfolgen der *Bohr-Sommerfeldschen* Arbeitsrichtung war es sehr bitter, daß man allmählich die tief begründete Unzulänglichkeit aller klassischen und halbklassischen Modelle anerkennen mußte. Heute freilich wissen wir, daß die Möglichkeit, an Hand klassischer Modelle viele mindestens approximativ richtige Ergebnisse abzuleiten, auch eben ein Ausfluß des Korrespondenzprinzips ist.

*Heisenbergs* großer Gedanke war durch die stürmisch fortschreitende Entwicklung umfassend vorbereitet. Der Korrespondenzgedanke, in mancherlei feineren Anwendungen zu erstaunlicher Fruchtbarkeit gereift — die von *Kronig* und anderen Verfassern entwickelten Intensitätsformeln für Multipletts und *Zeeman*-Komponenten bedeuteten hier einen Höhepunkt — hatte sich allgemein durchgesetzt; mit einer korrespondenzmäßigen Begründung der *Einsteinschen* Absorptions- und Emissionsgesetze (*van Vleck, Born-Jordan*) war der Brückenschlag von der *Bohrschen* Gedankenwelt zur Lichtquantentheorie begonnen. *Kramers* hatte (an *Ladenburg* anknüpfend) die Dispersion exakt ausgedrückt durch Frequenzen und Intensitäten von Absorptions- und Emissionslinien, und *Heisenberg-Kramers* erweiterten diese Formel zur quantitativen Erfassung des *Smekal-Raman*-Effektes. Die „Korrespondenzphysik“ war erstarkt — sie schickte sich an, ganz selbstständig zu werden, und die Reste halbklassischer Betrachtungen und Berechnungen allmählich überflüssig zu machen, trotz der dominierenden Rolle, welche die Atommodelle alten Stils bislang noch immer gespielt hatten.

Der *Heisenbergsche* Ansatz von 1924 ist bis heute vielen Physikern ein wenig unheimlich geblieben. Die Abstraktheit des Denkens, die zum Verstehen dieser Gedanken erforderlich ist — obwohl es sich um gar nichts anderes handelt, als eine ganz unbefangene, ganz unmittelbare Konfrontierung mit dem Extrakt der experimentellen Tatsachen selbst — diese abstrakte angebliche „Unanschaulichkeit“, und die einsame Höhe erkenntnistheoretischer Klarheit, die in diesem Vorstoß erreicht wurde, sie haben auf Viele abschreckend gewirkt; jedoch ist es ein Irrtum, zu glauben, daß die kurz hernach hervorgetretene glänzende Leistung *Schrödingers* — von nicht wenigen Lesern als eine Erlösung aus der Matrizen-Qual begrüßt — in ihrem Kerne weniger „abstrakt“ und „unanschaulich“ sei, oder geringere Anstrengungen zum richtigen Verständnis ihres Sinnes erfordere.

Wir sprachen schon davon, daß die tiefgründige erkenntnistheoretisch-philosophische Besinnung, die in *Heisenbergs* Arbeit von 1924 zum Ausdruck kam, die positivistische Linie fortsetzte und zum vollen Durchbruch brachte, die schon in *Bohrs* Korrespondenzprinzip angelegt war. Diese positivistische Tendenz war gewissermaßen der Rammbock, welcher das allmählich morsch gewordene Gebäude der halbklassischen Modelltheorien völlig niederlegte und beseitigte. Wir wollen, so sagte *Heisenberg*, die Quantengesetze zu formulieren versuchen als quantitative Beziehungen zwischen beobachtbaren Größen. Die kreisenden Elektronen der alten *Bohrschen* Modelle hat kein Mensch je gesehen; und seitdem man den Glauben abgelegt hat, daß man ihre Frequenzen aus Dispersionmessungen ermitteln könnte, kommen sie als physikalische Realität nicht mehr in Betracht. Ein Schluß, der uns heute so selbstverständlich erscheint, und der doch damals einen gewaltigen Umsturz im Vorstellungsgebäude der Atomphysik bedeutete. Sondern wir müssen uns einmal grundsätzlich besinnen, was an den Atomen eigentlich experimentell faßbar, was wirklich beobachtbar ist: Diese Besinnung ist ja immer der entscheidende Hebel positivistischer Erkenntnistheorie. Beobachtbar sind uns an einem Atom — z. B. am He-Atom — einerseits die Energiewerte der stationären Zustände, erfahrbär im *Franck-Hertz*-Experiment, und ferner die Frequenzen des Spektrums; zwischen beiden

besteht dann die *Bohrsche* Beziehung  $h \nu = E_1 - E_2$  als erfahrbare, prüfbare Gesetzmäßigkeit. Ferner sind uns beobachtbar Intensitäten von Absorptions- und Emissionslinien; man bestätigt empirisch die von *Einstein* gefundene Verknüpfung zwischen diesen Intensitäten, und man drückt sie zweckmäßiger Weise dann durch Übergangswahrscheinlichkeiten aus. Endlich gibt es zwischen den verschiedenen Übergängen oder Zustandspaaren noch gewisse Phasenbeziehungen, die dadurch beobachtbar werden, daß sie nach *Kramers-Heisenberg* eine Rolle beim *Raman*-Effekt spielen. Die große Entdeckung war nun die, daß solche Größen, wie die aufgezählten, in ihrer Gesamtheit gerade ausreichend sind, um eine in sich geschlossene Theorie zu formulieren, die es ermöglicht, die Energiewerte und Übergangswahrscheinlichkeiten etwa des He-Atoms zu berechnen — wenn man als bekannt voraussetzt, daß dieses aus einem schweren Kern und zwei leichten Elektronen besteht, wobei das *Coulombsche* Gesetz gilt. Daß es möglich sein muß, eine solche in sich geschlossene Theorie zu erreichen, wird zunächst wieder durch korrespondenzmäßige Erwägungen wahrscheinlich gemacht: Im Falle der klassischen Mechanik könnte man ja die mechanischen Bewegungsgleichungen für das He-Atom derart formulieren (es wäre umständlich, aber es wäre möglich), daß man sich die Koordinaten der Elektronen in eine *Fouriersche* Reihe entwickelt denkt, und die Bewegungsgleichungen dann als ein Gleichungssystem für die unendlich vielen *Fourier*-Koeffizienten formuliert. Also sollte es — da wir ja die Korrespondenzbeziehung zwischen *Fourier*-Koeffizienten und Übergangswahrscheinlichkeiten schon kennen, analog auch möglich sein, die „Quantenmechanik“ in Gleichungen zwischen beobachtbaren Größen (im obigen Sinne) zu formulieren. „Das glaube ich nicht, daß sich die *Fourier*-Koeffizienten selbständig machen“, soll *Einstein* hernach gesagt haben, welcher stets eine starke Skepsis gegenüber der vom Korrespondenzprinzip ausgehenden Entwicklung der Quantentheorie bewahrt hat; aber dieses Wort von den „selbständig machenden Fourierkoeffizienten“ bezeichnet sehr deutlich den Sinn des *Heisenbergschen* Unternehmens.

Und hier wollen wir diese kleine Betrachtung abschließen, welche nur den historischen Weg zur Quantenmechanik und Wellenmechanik ein wenig beleuchten sollte. *Heisenbergs* skizzierte Ansätze sind damals in Göttingen (*Born-Jordan*) und Cambridge (*Dirac*) sogleich aufgegriffen und zu einer systematischen Theorie ausgestaltet worden, deren abschließende Vervollständigung (*Born-Heisenberg-Jordan*) trotz der mathematischen Schwierigkeiten der hier erstmalig in die Physik eingeführten „Matrizenrechnung“ sogar schon die Durchrechnung des H-Atoms (*Pauli*) erlaubte, ehe dann *Schrödinger* mit seiner aus ganz anderen Gedankenkreisen herkommenden großen Arbeit die wunderbare Begegnung der seit der Frühzeit der Quantentheorie nebeneinander verlaufenen Gedankenwege vollzog. Die von ihm selbst erwiesene mathematische Äquivalenz der aus „Quantenmechanik“ und „Wellenmechanik“ zu gewinnenden Ergebnisse hat später die volle Vereinigung beider Theorien in der „statistischen Transformationstheorie“ (*Dirac, Jordan*) ermöglicht, deren physikalischer und philosophischer Gehalt in den *Heisenbergschen* Ungenauigkeitsbeziehungen und in dem *Bohrschen* Komplementaritätsbegriff eine abschließende Klärung erfuhr. Es wurde aber schon in den ersten Arbeiten zur Quantenmechanik auch eine grundsätzliche Aufklärung der bis dahin so rätselhaft scheinenden Beziehungen zwischen Lichtquanten und elektromagnetischem Feld erreicht. Aus dieser Aufklärung, die hernach von *Dirac* erfolgreich weitergeführt wurde, ist als ein über die eigentliche Quantentheorie hinausweisender Sonderzweig der Entwicklung dann eine „Quantenelektrodynamik“ entstanden (*Jordan-Klein, J.-Pauli, J.-Wigner, Heisenberg-Pauli*). Sie hat seitdem viele scharfsinnige Theoretiker zu tiefgründigen Untersuchungen veranlaßt, ohne daß dabei erzielten Ergebnisse zu ähnlicher Abgeschlossenheit gekommen wären, wie in den fast unübersehbar reichen Erfolgen, welche die Wellen- und Quantenmechanik in Atomphysik und Molekularphysik erringen konnte: Wir stoßen hier, in den Bemühungen zur Quantenelektrodynamik, bereits vielfach auf die dunklen Rätsel, welche die geheimnisvolle Elementarlänge umgeben.

Eingeg. am 14. November 1948 [A 192]